Chapitre 18 :
Séries numériques

Exercice 1 Soit la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Déterminez deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$
2. En déduire la nature de la série et calculer sa somme éventuelle

Exercice 2 Déterminez la nature des séries de terme général u_n suivantes (on ne demande pas la valeur de la somme dans le cas de convergence)

1. $u_n = \dfrac{n+2}{3n^3-1}$
2. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{3}{n^2+2}\right)$
3. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$
4. $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{(n+3)(n+1)}}$
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right)$
6. $u_n = \dfrac{\cos(n) + \sin(n)}{n^2}$

Exercice 3 (Test de Riemann)
Cet exercice revient sur une méthode de repérage de convergence vue dans le cours, appelée "test de Riemann", qu'il faut savoir redémontrer.

1. Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$.
   Montrez qu'alors $\sum u_n$ est convergente.
2. Montrez que les séries de terme général u_n suivantes sont convergentes :
   a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
   b) $u_n = \dfrac{n}{e^n}$

Exercice 4 (Séries usuelles) Calculer les sommes des séries de terme général u_n suivantes

1. $u_n = \dfrac{n^2-n-1}{n!}$
2. $u_n = \dfrac{n}{e^{2n}}$
3. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$
4. $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$
5. $u_n = (3n+1)2^{-n+2}$
6. $u_n = n^2\dfrac{x^n}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{1}{(n+2)!}$

Exercice 5 Soit $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

1. Montrez que $\sum u_n$ converge en calculant un équivalent de u_n.
2. A l'aide des propriétés du logarithme, écrire autrement u_n et faire apparaitre des sommes téléscopiques dans la somme partielle.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$ et sa somme éventuelle

Exercice 6 En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

1. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$
2. $\ln(n!) \sim n \ln n$
3. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln(n))$

Exercice 7 En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

Exercice 8 Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et vérifier que f' est décroissante sur $[2, +\infty[$.
2. a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 , on a : $f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k \ln k}$.

   b) En déduire que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$.

   c) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0, élément de $]0, 1[$, et par la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$.

   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

   a) Quelle est la nature de la série $\Sigma (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$?

   b) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ et en déduire la nature de la série Σu_n.

Exercice 10 (d'après HEC) Pour tout entier naturel r et pour tout réel q appartenant à $]0, 1[$, on considère la suite $(S_n(r))_{n \geq r}$ définie par : $\forall n \geq r, S_n(r) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} q^{k-r}$.

1. a) Justifier à l'aide d'un résultat du cours la convergence de la suite $(S_n(r))_{n \geq r}$ dans le cas où r est égal à 0 , à 1 , puis à 2 . Quelle est sa limite dans chacun de ces cas ?

   b) Pour r fixé, montrer que : $\binom{n}{r+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{r+1} q^{n-r} = 0$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $r+1$:

$$(1-q) S_n(r+1) = S_{n-1}(r) - \binom{n}{r+1} q^{n-r}$$

   b) Pour un certain entier naturel r, on suppose que la série $\sum \binom{k}{r} q^{k-r} (k \geq r)$ converge, et que sa somme est : $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

   Montrer alors que la série $\sum \binom{k}{r+1} q^{k-r-1}$ converge et que : $\sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r+1} q^{k-r-1} = \frac{1}{(1-q)^{r+2}}$.

   c) Conclure par récurrence sur r que $\sum \binom{k}{r} q^{k-r}$ converge, et que : $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

Exercice 11 (Étude d'une fonction définie comme somme d'une série.)

1. Montrer que, quel que soit le réel x, positif ou nul, la série $\sum \frac{1}{2^k + x} (k \in \mathbb{N})$ converge.
2. Pour tout réel x positif ou nul, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k + x}$.
   a) Montrer que : $\forall x \geq 0, f(2x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{1+2x}$.
   b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   c) Montrer que f admet une limite en $+\infty$, puis la déterminer.

Exercice 12 On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

après en avoir justifié l'existence.

A partir d'ici les exos sont plus difficiles et théoriques.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$

Quelle est la nature de la sdtg u_n ?

Exercice 14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs dont la série converge. Que peut-on dire de la série de terme général v_n où $v_n = u_0 \cdots u_n$?

Exercice 15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Comparer les assertions suivantes :

(i) La sdtg u_n converge.

(ii) La sdtg $\sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.

Exercice 16 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$$

Exercice 17 Soit $a \in]0;1[$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}$.

Exercice 18 (Difficile) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0 en décroissant telle que $\sum_{k=0}^{n} u_k - n u_n$ est bornée. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 19 (Difficile) On note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier $n \geq 1$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série

$$\sum \frac{x^{a_n}}{n^3} ?$$

Problème - Ecricome Maths Appro 2024 1/3 de Sujet

1. Rappeler en fonction du réel α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

   On note alors $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ et $R_N=\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

2. a) En étudiant la monotonie de la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :
   $$\frac{1}{N+1}\leqslant R_N\leqslant\frac{1}{N}$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N\geqslant N_0, |S_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

4. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N=S_N+\dfrac{1}{N+1}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :
   $$|T_N-S|\leqslant\frac{1}{N^2}.$$

   b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N\geqslant N_1, |T_N-S|\leqslant 10^{-3}$.

   On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls :
   $$u_n(p)=\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

   a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n(p)$.

   On pose pour tout entier naturel p non nul :
   $$U(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(p)$$

6. a) Déterminer deux réels a,b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1)=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur de $U(1)$.

7. a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n\geqslant 1$ et $p\geqslant 2, u_n(p-1)-u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p)=\dfrac{1}{p\times p!}$.

8. a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\frac{1}{n^2}=\frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$$

b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N,p) d'entiers naturels non nuls :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p = 3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N \geqslant N_2, |U_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N, respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

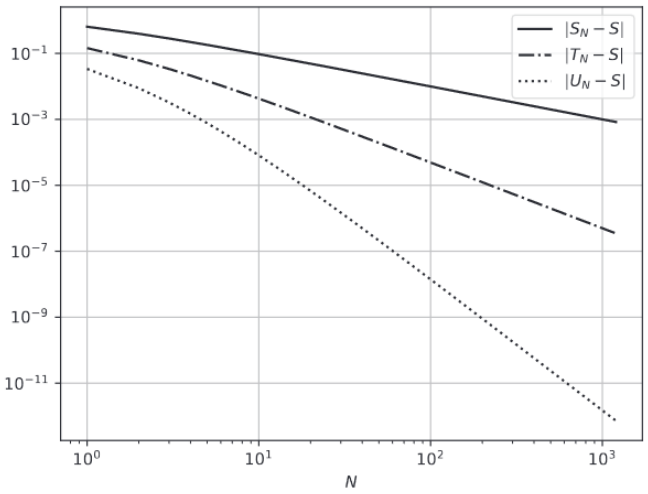


FIGURE 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N.